

MAI 2 - domácí úkol 12 (dvojný a trojný integrál 3)

Zkuste vypočítat aspoň tři ze zadaných příkladů:

Dvojný integrál - substituce do polárních souřadnic:

1. $\iint_D y \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$.
2. $\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.
3. $\iint_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $K = \{[x, y]; (x - R)^2 + y^2 \leq R^2\}$ - co by tento integrál mohl „počítat“?

Trojný integrál:

a) užití válcových souřadnic:

1. $\iiint_D z^2 \, dx \, dy \, dz$,
kde oblast D je ohraničená a) rovinou $z = 0$ a plochou $z = 9 - x^2 - y^2$;
b) plochou $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 4$.
2. $\iiint_D y \, dx \, dy \, dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$;

b) užití sférických souřadnic:

1. $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$;

A aplikace:

1. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinou $z = 0$ a plochami $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 1$.
2. Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničené plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$ a které obsahuje počátek soustavy souřadné.
(Návod: při výpočtu použijte válcové souřadnice.)
3. „Zkontrolujte“ vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru $R > 0$.
(Návod: při výpočtu použijte sférické souřadnice.)